ELSEVIER Linear Algebra and its Applications 288 (1999) 45–51

LINEAR ALGEBRA AND ITS APPLICATIONS

Forme de Jordan des extensions d'opérateurs linéaires (problème de Carlson) et sous-espaces réduisants minimaux contenant un sous-espace donné

Bernard Charles *, Abdelkhalek Faouzi

Département de Mathématiques, Université Montpellier II, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5, France

Received 26 March 1995; accepted 21 August 1998

Submitted by D.H. Carlson

Résumé

Soient E' et E'' deux espaces vectoriels complexes de dimension finie. Etant donné les opérateurs linéaires A' sur E' et A'' sur E'' sous leurs formes de Jordan respectives, nous montrons que l'étude de la forme de Jordan des opérateurs A sur $E' \oplus E''$ dont les matrices sont de la forme

$$A = \begin{bmatrix} A' & B \\ 0 & A'' \end{bmatrix}$$

avec B un opérateur linéaire de E'' dans E' peut-être abordée à partir de la description des sous-espaces rèduisants minimaux contenant un sous-espace donné. Comme application, nous donnons une nouvelle méthode pour la détermination explicite de la forme de Jordan de A dans le cas où A'' est cyclique.

1. Introduction

Le problème de Carlson [1] se formule de la manière suivante: soient E' et E'' deux espaces vectoriels de dimension finie sur le corps des complexes C. Etant

* Corresponding author. Fax: +33 4 67 14 30 31.

0024-3795/99/$ - see front matter
PII: S0024-3795(98)10173-8

donné les opérateurs linéaires A' sur E' et A'' sur E'' sous leurs formes de Jordan respectives, donner toutes les formes de Jordan possibles des opérateurs A sur $E' \oplus E''$ tels que A' et A'' soient induits par A, c'est-à-dire les opérateurs A dont les matrices sont de la forme:

$$A = \begin{bmatrix} A' & B \\ 0 & A'' \end{bmatrix}, \tag{1}$$

où B est un opérateur linéaire de E'' dans E'. Par décomposition primaire, cette étude se ramène au cas où A' et A'' sont nilpotents.

Ce problème initié par Carlson [1] (d'où son nom!) a fait l'objet directement et indirectement de plusieurs études. Nous citons entre autres. Rodman et Schaps [9], Johnson et Schreiner [7,8], Johnson et al. [6]. Dans le présent article, nous donnons une nouvelle approche au problème de Carlson. Nous montrons que ce problème qui revient à étudier la forme de Jordan des extensions d'opérateurs linéaires en dimension finie, conduit au problème de la description des sous-espaces réduisants minimaux contenant un sous-espace invariant donné. Par le biais de cette nouvelle approche, nous reprenons le problème de Carlson pour les extensions A d'un opérateur linéaire nilpotent A' sur E' par un opérateur linéaire nilpotent cyclique A'' sur E'' et nous en ramenons l'étude à celle d'une classe d'extensions "irréductibles", classe dont nous décrivons explicitement la forme de Jordan. Nous retrouvons ainsi de manière différente la description faite par Johnson et Schreiner dans [7] (cas "*one against many*").

2. Préliminaires

Soient E un espace vectoriel sur C et $\mathscr{L}(E)$ l'algèbre des opérateurs linéaires sur E. Pour $A \in \mathscr{L}(E)$, nous désignerons par Lat A le treillis des sous-espaces invariants pour A. Si $M \subseteq E$, nous noterons Vect(M) le plus petit sous-espace de E contenant M et $\mathrm{Vect}_A(M)$ le plus petit sous-espace invariant pour A contenant M. Si $x \in E, \mathrm{Vect}_A(x) = \mathrm{Vect}(A^i x : i \in \mathbb{N})$. Dans le cas où l'opérateur A est nilpotent, nous dirons que $x \in E$ est d'exposant $k \in \mathbb{N}$ si k est le plus petit entier tel que $A^k x = 0$. Lorsque A est nilpotent cyclique d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ (i.e. $E = \mathrm{Vect}_A(x)$ et x d'exposant k), nous le noterons $J(k)$. Nous noterons (E, A) le $C[X]$-module obtenu en posant $fx = f(A)x$ pour tout $f \in C[X]$ et tout $x \in E$.

Soient E' et E'' deux espaces vectoriels sur C. Une extension de $A' \in \mathscr{L}(E')$ par $A'' \in \mathscr{L}(E'')$ est un opérateur $A \in \mathscr{L}(E)$ tel que le module (E, A) soit une extension du module (E', A') par le module (E'', A''). Ceci s'exprime aussi par l'existence d'une suite exacte courte:

$$0 \to (E', A') \xrightarrow{i} (E, A) \xrightarrow{\sigma} (E'', A'') \to 0. \tag{2}$$

On peut présenter E sous forme d'une somme directe $E' \oplus E''$ d'espaces vectoriels, ce qui permet d'utiliser une représentation matricielle des opérateurs de $\mathscr{L}(E)$. Pour qu'un opérateur $A \in \mathscr{L}(E' \oplus E'')$ soit une extension de $A' \in \mathscr{L}(E')$ par $A'' \in \mathscr{L}(E'')$, il faut et il suffit qu'il existe un opérateur linéaire B de E'' dans E' tel que la matrice de A soit de la forme:

$$A = \begin{bmatrix} A' & B \\ 0 & A'' \end{bmatrix}.$$

Ainsi, le "problème de Carlson" revient à étudier la forme de Jordan des extensions d'opérateurs linéaires en dimension finie.

Dans toute la suite E' et E'' sont deux espaces vectoriels de dimension finie sur C et $A \in \mathscr{L}(E' \oplus E'')$ est une extension de $A' \in \mathscr{L}(E')$ par $A'' \in \mathscr{L}(E'')$. De l'exactitude de (2) on déduit facilement qu'un changement du supplémentaire de E' dans $E = E' \oplus E''$ laisse invariante la forme de Jordan de l'opérateur A''.

Supposons que $A' \in \mathscr{L}(E')$ et $A'' \in \mathscr{L}(E'')$ sont nilpotents. Alors, quitte à changer le supplémentaire de E' dans $E = E' \oplus E''$, on peut supposer que l'extension A vérifie:

$$\begin{aligned} &E'' = \oplus_{j=1}^{q} \mathrm{Vect}_{A''}(e_j) \quad \text{avec } e_j \text{ d'exposant } n_j \text{ dans } (E'', A''), \\ &A^s e_j = A''^s e_j \quad \text{pour } 0 \leqslant s \leqslant n_j - 1 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant q, \\ &A^{n_j} e_j \in E' \quad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant q. \end{aligned} \tag{3}$$

Ceci nous conduit au problème suivant: déterminer un plus petit sous-espace réduisant pour A' contenant $A^{n_1}e_1, \dots, A^{n_q}e_q$. En effet, la détermination d'un tel sous-espace permet de restreindre l'étude de la forme de Jordan de l'extension A à celle d'une extension plus "petite", et ce de la manière suivante:

Etant donné un sous-espace F' réduisant pour A' minimal contenant $\mathrm{Vect}(A^{n_1}e_1, \dots, A^{n_q}e_q)$, soit $G' \in \mathrm{Lat}\, A'$ tel que $E' = G' \oplus F'$. Alors on a $E' \oplus E'' = G' \oplus (F' \oplus E'')$ avec G' et $F' \oplus E''$ invariants pour A. Ainsi, dans cette nouvelle décomposition, l'extension A s'écrit $A = A|G' \oplus A|(F' \oplus E'')$ et on voit que l'étude de la forme de Jordan de A se ramène à l'étude de l'opérateur $T = A|(F' \oplus E'')$ lequel est une extension de $A|F'$ par A''.

Remarque. Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur C, $A \in \mathscr{L}(E)$ et $x_1, \dots, x_q$ des vecteurs de E. Il est facile de vérifier que, pour la construction d'un sous-espace réduisant pour A minimal contenant $x_1, \dots, x_q$, on peut se restreindre au cas où ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Conclusion: Le problème de Carlson se ramène à l'étude des extensions A de $A' \in \mathscr{L}(E')$ nilpotent par $A'' \in \mathscr{L}(E'')$ vérifiant les conditions (3) et telles que les vecteurs $A^{n_1}e_1, \dots, A^{n_q}e_q$ soient linéairement indépendants.

3. Forme de Jordan des extensions d'un opérateur nilpotent par un opérateur nilpotent cyclique

Le théorème suivant est une transcription en langage d'opérateurs linéaires d'un résultat sur les sous-groupes purs d'un groupe abélien G qui contiennent un sous-groupe donné H (voir [3], Théorème 3 et [5], Lemme 65.4).

Théorème 1. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur C, $A \in \mathscr{L}(E)$* nilpotent, $x \in E$, $x \neq 0$. *Alors il existe des sous-espaces réduisants pour A minimaux contenant* $\mathrm{Vect}_A(x)$. *De plus, tout sous-espace F réduisant pour A minimal contenant* $\mathrm{Vect}_A(x)$ *est de la forme $F = \oplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}_A(x_i)$ avec x_i d'exposant m_i et avec les conditions:*

$$x = \sum_{i=1}^{p} A^{k_i} x_i \quad avec \begin{cases} k_1 > k_2 > \cdots > k_p, \\ m_1 - k_1 > \cdots > m_p - k_p. \end{cases}$$

Comme application de ce théorème, nous avons le résultat suivant qui permet de restreindre l'étude de la forme de Jordan des extensions d'opérateurs nilpotents par un nilpotent cyclique:

Théoréme 2. *Soient E' et E'' deux espace vectoriels de dimension finie sur C, $A' \in \mathscr{L}(E')$ nilpotent, $A'' \in \mathscr{L}(E'')$ nilpotent cyclique d'ordre n et e un vecteur générateur de (E'', A''). Si A est une extension de A' par A'', alors A vérifie l'une des deux propriétés suivantes:*

(i) $A = A' \oplus J(n)$.

(ii) *Il existe $F', G' \in \mathrm{Lat}(A')$ tels que:*

$$E' = F' \oplus G',$$
$$F' = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}_A(f_i) \quad avec\ f_i\ d'exposant\ m_i,$$
$$A = A|G' \oplus T$$

où T est une extension de $T' = A|F'$ par A'' telle que:

$$T|\mathrm{Vect}_A(f_i) = J(m_i),$$

$$T^s e = A''^s e \quad pour\ 0 \leqslant s \leqslant n-1,$$

$$T^n e = A^n e = \sum_{i=1}^{p} T^{k_i} f_i \quad avec \begin{cases} k_1 > k_2 > \cdots > k_p, \\ m_1 - k_1 > \cdots > m_p - k_p. \end{cases}$$

Démonstration. Quitte à changer le supplémentaire de E' dans $E = E' \oplus E''$, on peut supposer que l'extension A vérifie (3) avec $q = 1$, c'est-à-dire:

$$\begin{cases} E'' = \mathrm{Vect}_{A''}(e), \\ A^s e = A''^s e \quad \text{pour } 0 \leqslant s \leqslant n-1, \\ A^n e \in E'. \end{cases}$$

Dans ce cas, $A'' = J(n)$. Si $A^n e = 0$, alors $A = A' \oplus A'' = A' \oplus J(n)$. Supposons que $A^n e \neq 0$. Alors d'après le Théorème 1 il existe un sous-espace F' réduisant pour A' minimal contenant $A^n e$ et il existe $f_1, f_2, \ldots, f_p$ dans E' tels que $F' = \oplus_{i=1}^p \mathrm{Vect}_A(f_i)$ avec les conditions:

$$A^n e = \sum_{i=1}^{p} A^{k_i} f_i \quad \text{avec} \begin{cases} k_1 > k_2 > \cdots > k_p, \\ m_1 - k_1 > \cdots > m_p - k_p, \end{cases}$$

où m_i est l'exposant de f_i.

Soit $G' \in \mathrm{Lat}A'$ tel que $E' = G' \oplus F'$. Alors dans la nouvelle décomposition $E' \oplus E'' = G' \oplus (F' \oplus E'')$ l'extension A vérifie $A = A|G' \oplus A|(F' \oplus E'')$. En posant $T = A|(F' \oplus F'')$, on voit que T est une extension de $T' = A|F' \in \mathscr{L}(F')$ par A'' qui vérifie les conditions requises. □

Théorème 3 ([7], Théorème 4). *Soit A une extension de $A' \in \mathscr{L}(E')$ nilpotent par $A'' \in \mathscr{L}(E'')$ nilpotent cyclique d'ordre n, définie par:*

$$\begin{cases} E' = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}_{A'}(f_i) \quad \textit{et} \quad A|\mathrm{Vect}_{A'}(f_i) = J(m_i)\,, \\ E'' = \mathrm{Vect}_{A''}(e), \\ A^s e = A''^s e \quad \textit{pour } 0 \leqslant s \leqslant n-1, \\ A^n e = \sum_{i=1}^{p} A^{k_i} f_i \quad \textit{avec} \begin{cases} k_1 > k_2 > \cdots > k_p\,, \\ m_1 - k_1 > \cdots > m_p - k_p\,. \end{cases} \end{cases}$$

On a les propriétés suivantes (on a posé $k_{p+1} = m_{p+1} = 0$):

(i) *Si $n \geqslant k_1$ la forme de Jordan de A est:*

$$J(n + m_1 - k_1) \oplus J(k_1 + m_2 - k_2) \oplus \ldots \oplus J(k_{p-1} + m_p - k_p) \oplus J(k_p).$$

(ii) *Si $n < k_1$ et si t est l'entier tel que $k_t > n \geqslant k_{t+1}$, la forme de Jordan de A est:*

$$\left\{ \bigoplus_{i=1}^{t} J(m_i) \right\} \oplus J(n + m_{t+1} - k_{t+1}) \oplus \left\{ \bigoplus_{i=t+1}^{p} J(k_i m_{i+1} - k_{i+1}) \right\}.$$

Démonstration. (i) Supposons $n \geqslant k_1$ et considérons le vecteur $e_1 = A^{n-k}e - f_1$, alors $A^{k_1} e_1 = \sum_{i=2}^p A^{k_i} f_i$. En posant $G = \mathrm{Vect}(e, \ldots, A^{n+m_1-k_1-1}e) = \mathrm{Vect}_A(e)$, $F' = \oplus_{i=2}^p \mathrm{Vect}_{A'}(f_i)$ et $F'' = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, A^{k_1-1}e_1)$ nous avons $E' \oplus E'' = G \oplus (F' \oplus F'')$ et G et $F' \oplus F''$ sont invariants pour A. Ceci entraîne $A = A|G' \oplus A|(F' \oplus F'')$ avec $A|G' = J(n + m_1 - k_1)$ et $A|(F' \oplus F'')$ une extension de $A|F'$ par un opérateur nilpotent cyclique d'ordre k_1 défini sur F''. De plus $A|(F' \oplus F'')$ vérifie des conditions du même type que celles que vérifie A, ce qui permet de lui appliquer la même démarche que précédemment. Ainsi, de proche en proche, nous arrivons à la forme de Jordan attendue.

(ii) Supposons $n < k_1$. Dans ce cas, on considère le vecteur $g_1 = e - A^{k_1-n}f_1$ et on pose $E_1'' = \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, A^{n-1}g_1)$ et $F_1' = \oplus_{i=2}^{p}\mathrm{Vect}_{A'}(f_i)$. Alors on a $E' \oplus E' = \mathrm{Vect}_{A''}(f_1) \oplus (F_1' \oplus E_1'')$ et $F_1' \oplus E_1''$ est invariant pour A, ce qui donne:

$$A = A|\mathrm{Vect}_{A'}(f_1) \oplus A|(F_1' \oplus E_1'') = J(m_1) \oplus A|(F_1' \oplus E_1'').$$

On passe ensuite à $A|(F_1' \oplus E_1'')$ et ainsi de suite. A l'étape t, on obtient:

$$E' \oplus E'' = [\mathrm{Vect}_{A'}(f_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Vect}_{A'}(f_t)] \oplus (F_t' \oplus E_t''),$$

avec $F_t' = \oplus_{i=t+1}^{p}\mathrm{Vect}_{A'}(f_i)$. Par suite, on a $A = \{\oplus_{i=1}^{t}J(m_i)\} \oplus A|(F_t' \oplus E_t'')$. De plus l'opérateur $A|(F_t' \oplus E_t')$ vérifie les hypothèses du cas (i), ce qui permet d'obtenir la forme de Jordan annoncée pour A. □

Corollaire 4 ([1]). *Les hypothéses sont les mêmes que dans le Théorème 3 et on suppose que $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_{p+1}$ sont les ordres des composantes cycliques de la forme de Jordan de A. Alors*

$$r_{p+1} \leqslant n \leqslant r_1, \qquad r_{i+1} \leqslant m_i \leqslant r_i \quad \textit{pour } i = 1, \ldots, p,$$

et

$$\sum_{i=1}^{p+1} r_i = n + \sum_{i=1}^{p} m_i.$$

Remarque. Les résultats du présent article constituent une partie de la thèse de doctorat du second auteur [4]. Cette thèse contient une démonstration du Théorème 1 en langage d'opérateurs linéaires.

References

[1] D. Carlson, Inequalities for the degrees of elementary divisors of modules, Linear Algebra Appl. 5 (1972) 293–298.
[2] B. Charles, Etude sur les sous-groupes d'un groupe ablieén, Bull. Soc. Math. 88 (1960) 217–227.
[3] B. Charles, Opèrateurs linéaires sur un espace de Banach et modules sur un anneau principal, Symposia Mathematica vol XIII (1979) 121–143.
[4] A. Faouzi, Sur la forme de Jordan des extensions d'opèrateurs linèares, Problème de Carlson, Thèse de Doctorat, Univ. de Montpellier, Mai 1994.
[5] L. Fuchs, Infinite Abelian Groups, vol I, II, Academic Press, 1970; 1973.
[6] C.R. Johnson, E.A. Schreiner, L. Elsner, Eigenvalue neutrality in block triangular matrices, Linear and Multilinear Algebra 27 (1990) 289–297.
[7] C.R. Johnson, E.A. Schreiner, Explicit Jordan form for certain block triangular matrices, Linear Algebra Appl. 162 (1991) 297–314.

[8] C.R. Johnson, E.A. Schreiner, Explicit Jordan form for certain block triangular matrices II, Linear Algebra Appl. 162 (1992) 601–613.

[9] L. Rodman, M. Schaps, On the partial multiplicities of a product of two matrix polynomials, Integral Equations Operator Theory 2 (1979) 565–599.